JUKEN

内部生用情報誌

3月号
VOL. 168

茗渓予備校通信KIRI増刊　大学受験ニュース

発行日　令和7年　3月　15日
発行者　茗渓予備校広報センター

◆ 忘れたころの相加・相乗…

今年度の入試問題から：

2025 年度 東京大学 理科系入試数学 第 2 問

(1) $x > 0$ のとき, 不等式 $\log x \leqq x - 1$ を示せ。

(2) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} n \int_1^2 \log\left(\frac{1 + x^{\frac{1}{n}}}{2}\right) dx$$

ここ数年の傾向としては、第 2 問は難易度的に比較的穏やかな印象でしたが、昨年度・今年度と 2 年続けて本格的な数学 III の問題が出題されました。

(1) は簡単です。直接示してもよいですし、有名事実「指数関数 e^x の $x = 0$ での傾きは 1 である」ことから、グラフを描けば、$e^x \geqq x + 1$ が見てとれます。$t = e^x$ で表現すれば、$t \geqq \log t + 1$ となります。

(2) が本問の本丸です。「まぁ(1) の結果を使うんだろうなあ?」と推測して、使ってみましょう。

$$\log\left(\frac{1 + x^{\frac{1}{n}}}{2}\right) \leqq \frac{1 + x^{\frac{1}{n}}}{2} - 1 = \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{2}$$

とりあえず $x = 1$ から 2 まで積分してみましょう。

$$\int_1^2 \log\left(\frac{1 + x^{\frac{1}{n}}}{2}\right) dx \leqq \int_1^2 \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{2} dx$$

右辺は、頑張れば積分できますね。

$$\int_1^2 \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{2} dx = \frac{1}{2}\left[\frac{n}{1+n} x^{\frac{1+n}{n}} - x\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{n}{1+n}\left(2^{\frac{1+n}{n}} - 1\right) - (2 - 1)\right\} = \frac{n}{1+n}\left(2^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

さらに、これを n 倍して、極限 $\lim\limits_{n\to\infty}$ をとるのですが、括弧の中を見て「惜しい！」と思えるか?どうかです。仮に括弧の中が $\frac{1}{2}$ でなくて 1 ならば、

$$\lim_{n\to\infty} n\left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \log 2$$

有名事実「指数関数 2^x の $x = 0$ での傾きは $\log 2$ である」が使えます。とりあえずこの部分だけでも、それにして、後は野となれ山となれ？帳尻合わせに走りましょう。

$$\frac{n}{1+n}\left(2^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{n}{1+n}\left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right) + \frac{n}{2(1+n)} - \frac{1}{2} = \frac{n}{1+n}\left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right) - \frac{1}{2(1+n)}$$

で帳尻合わせができたので、いざ計算すると、

$$\lim_{n\to\infty} n\int_1^2 \frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{2}dx=\lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{n}{1+n}\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)-\frac{1}{2(1+n)}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+n}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}-\frac{n}{2(1+n)}=\log 2-\frac{1}{2}$$

と上手く極限値が求まりました。

ここまでで、

$$\lim_{n\to\infty} n\int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx \leqq \log 2-\frac{1}{2}$$

が示せました。

「はさみ打ちの原理」を使うには、下から抑え込む不等式も必要です。

下側から何で抑え込むか？これが難しいです。厳し過ぎると計算不能ですし、甘過ぎるとはさみ込んでくれません。

例えば敢えて失敗例。題意の関数 $y=\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)$ は $x=1$ で $y=0$、$x=2$ で $y=\log\left(\frac{1+2^{\frac{1}{n}}}{2}\right)$ となる上に凸の関数なので、同じ両端の点を通る直線 $y=\log\left(\frac{1+2^{\frac{1}{n}}}{2}\right)(x-1)$ で下から押さえられます。これの $x=1$ から 2 までの積分値は

$$\int_1^2 \log\left(\frac{1+2^{\frac{1}{n}}}{2}\right)(x-1)dx=\left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+2^{\frac{1}{n}}}{2}\right)(x-1)^2\right]_1^2=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+2^{\frac{1}{n}}}{2}\right)$$

これを n 倍して、極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}$ をとるのですが、相変わらず

$$n\log\left(\frac{1+2^{\frac{1}{n}}}{2}\right)=\frac{\log\left(1+2^{\frac{1}{n}}\right)-\log\left(1+2^0\right)}{\frac{1}{n}}$$

のように関数 $\log(1+2^x)$ の $x=0$ での微分係数に帰着して計算すると極限値は $\frac{1}{4}\log 2$ となってしまいます。これは上手くはさみ打てません。所詮、三角形くらいでの近似では甘かったようです。

題意の関数 $y=\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)$ の真数部分 $\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}$ を凝視すると「足して 2 で割る」平均が想起されます。そこで相加・相乗平均の関係を 2 つの正数 $1, x^{\frac{1}{n}}$ に適用して

$$\sqrt{1\times x^{\frac{1}{n}}}\leqq\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}$$

左辺は $\sqrt{x^{\frac{1}{n}}}=x^{\frac{1}{2n}}$ なので、これの自然対数をとって、$x=1$ から 2 までの積分して、n 倍したものの極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}$ は

$$\lim_{n\to\infty} n\int_1^2 \log x^{\frac{1}{2n}}dx=\frac{1}{2}\int_1^2 \log x dx=\frac{1}{2}\left[x\log x-x\right]_1^2=\frac{1}{2}\{(2\log 2-2)-(0-1)\}=\log 2-\frac{1}{2}$$

と計算できて、上手くはさみ打てました。

$$\log 2-\frac{1}{2}\leqq\lim_{n\to\infty} n\int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx\leqq\log 2-\frac{1}{2}$$